数理解析研究所講究録
第 854 巻 1993 年 57-64

保型形式の満たす微分方程式について

大山　陽介（大阪大・理学部）
Ohyama, Y.

0．はじめに

テータ零値の満たす微分方程式の研究は Jacobi にさかのぼる。その後、Halphen、Chazy などが研究したが、今世紀に入って、まとまった研究としては忘れ去られた感がある。テータ零値に限らない一般の保型形式の満たす微分関係式については、その後も散発的にいろいろ研究されているようである。なお、最近、自己双対 Einstein 計量との関係が指摘されている。

ここでは、Halphen の微分方程式

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dX_2}{d\tau}+\frac{dX_3}{d\tau} &= 2X_2X_3,\\
\frac{dX_4}{d\tau}+\frac{dX_2}{d\tau} &= 2X_4X_2,\\
\frac{dX_3}{d\tau}+\frac{dX_4}{d\tau} &= 2X_3X_4.
\end{aligned}
$$

について、２通りの導出方法を述べる。一つは、テータ函数の加法定理と熱方程式を用いるものである。もう一つは、楕円積分が満たす超幾何微分方程式を用いるものである。研究会では、前者の方法についてのみ述べた。

次に、Halphen の方程式の解空間の構造について調べる。この非線形方程式の正則な（有理型の）解を完全に決定することができる。

Halphen の方程式を高次元に一般化することも考えられる。２次元の場合の試みについては、数研講究録 No.810 p.202--217 を参照されたい。

1. Jacobi のテータ函数

Jacobi の楕円テータ函数は

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\theta_1(z,\tau) &= i\sum_{n=-\infty}^{\infty}(-)^n e^{(n-1/2)^2\pi i\tau}e^{(2n-1)\pi iz},\\
\theta_2(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{(n-1/2)^2\pi i\tau}e^{(2n-1)\pi iz},\\
\theta_3(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{n^2\pi i\tau}e^{2n\pi iz},\\
\theta_4(z,\tau) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty}(-)^n e^{n^2\pi i\tau}e^{2n\pi iz},
\end{aligned}
$$

で定義される。ここで、z は複素数、τ は虚部が正の複素数である。θ_1 は z について奇関数、$\theta_2, \theta_3, \theta_4$ は z について偶関数である。以下では、$\theta_j = \theta_j(0,\tau)$ (j=2,3,4) とかく。

テータ函数の性質としては、

1） z-変数について、加法公式を満たす。

2） τ-変数について、保型性を持つ。

3） (z,τ)-変数について、熱方程式を満たす。

などが挙げられる。ここでは、とりあえず保型性を忘れて、（1）（3）の性質から出発する。具体的に方程式を書くと、

加法公式：

$$
(3)\qquad
\begin{aligned}
\theta_2(x+y)\theta_3(x-y)\theta_2\theta_3 &= \theta_2(x)\theta_3(x)\theta_2(y)\theta_3(y) - \theta_1(x)\theta_4(x)\theta_1(y)\theta_4(y),\\
\theta_4(x+y)\theta_2(x-y)\theta_2\theta_2 &= \theta_4(x)\theta_2(x)\theta_4(y)\theta_2(y) + \theta_1(x)\theta_3(x)\theta_1(y)\theta_3(y),\\
\theta_3(x+y)\theta_4(x-y)\theta_3\theta_4 &= \theta_3(x)\theta_4(x)\theta_3(y)\theta_4(y) - \theta_1(x)\theta_2(x)\theta_1(y)\theta_2(y),
\end{aligned}
$$

熱方程式：

$$
(4)\qquad \frac{\partial^2\theta_j(z,\tau)}{\partial z^2} = 4\pi i\frac{\partial\theta_j(z,\tau)}{\partial\tau},
$$

加法公式の両辺を x, y で 2 回づつ微分して、x=y=0 とすると

$$
(5) \qquad
\begin{aligned}
&(\theta_2^{(4)}\theta_3 - 2\theta_2^{(2)}\theta_3^{(2)} + \theta_2\theta_3^{(4)})\theta_2\theta_3 = (\theta_2^{(2)}\theta_3 + \theta_2\theta_3^{(2)})^2,\\
&(\theta_4^{(4)}\theta_2 - 2\theta_4^{(2)}\theta_2^{(2)} + \theta_4\theta_2^{(4)})\theta_4\theta_2 = (\theta_4^{(2)}\theta_2 + \theta_4\theta_2^{(2)})^2,\\
&(\theta_3^{(4)}\theta_4 - 2\theta_3^{(2)}\theta_4^{(2)} + \theta_3\theta_4^{(4)})\theta_3\theta_4 = (\theta_3^{(2)}\theta_4 + \theta_3\theta_4^{(2)})^2.
\end{aligned}
$$

ここで

$$
(6) \qquad X_j(\tau) = 2\frac{\partial}{\partial\tau}\log\theta_j(0,\tau);
$$

(j=2,3,4) と置けば、熱方程式より

$$
\begin{aligned}
X_j &= \frac{2}{4\pi i}\frac{\theta_j^{(2)}}{\theta_j},\\
\frac{dX_j}{d\tau} &= \frac{2}{(4\pi i)^2}\left(\frac{\theta_j^{(4)}}{\theta_j} - \left(\frac{\theta_j^{(2)}}{\theta_j}\right)^2\right).
\end{aligned}
$$

となるので、代入して Halphen の方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{dX_2}{d\tau} + \frac{dX_3}{d\tau} &= 2X_2X_3,\\
\frac{dX_4}{d\tau} + \frac{dX_2}{d\tau} &= 2X_4X_2,\\
\frac{dX_3}{d\tau} + \frac{dX_4}{d\tau} &= 2X_3X_4,
\end{aligned}
$$

を得る。

Halphen の方程式は次のようにも書き直されるので、3 階の holonomic な方程式である：

$$
(7) \qquad
\begin{aligned}
\frac{dX_2}{d\tau} &= X_2X_3 + X_2X_4 - X_3X_4\\
\frac{dX_3}{d\tau} &= X_2X_3 - X_2X_4 + X_3X_4\\
\frac{dX_4}{d\tau} &= -X_2X_3 + X_2X_4 + X_3X_4.
\end{aligned}
$$

2. 楕円積分とHalphen の方程式

本節では、Halphen の方程式を別の方法で導き出す。歴史的に言えば、保型函数の研究は楕円積分に繋がる。楕円積分は、楕円曲線の周期積分であり、超幾何微分方程式を満たす。そこで、出発点を超幾何方程式にとり、それから Halphen の方程式を導出する。Jacobi はこの方法でテータ零値の満たす微分方程式を見つけたのであるが、彼はテータ零値の対数微分ではなく、テータ零値そのものが満たす、単独の方程式を求めたため、得られた方程式は複雑なものになっている。

楕円積分は次で定義される：

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}$$

$$K' = \int_1^{1/k} \frac{dt}{\sqrt{(t^2-1)(1-k^2t^2)}}.$$

$x=k^2$ とおくと、K、K' は、次の超幾何微分方程式を満たす：

$$x(1-x)y'' + (1-2x)y' - \frac{1}{4}y = 0. \tag{8}$$

正確にいうと、

$$K = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; x\right), \qquad K' = \frac{1}{2}\pi F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1; 1-x\right).$$

となる。ここで、derivation δ を

$$\delta = x(1-x)\frac{d}{dx}$$

で定めると、(8) は

$$\delta^2 y = \frac{x(1-x)}{4}y$$

と書き直される。したがって、

$$K\delta^2 K' - K'\delta^2 K = 0$$

となり、これから、適当な定数 a が存在して、

$$K\delta K' - K'\delta K = a$$

よって、

$$\delta\left(\frac{K'}{K}\right) = \frac{a}{K^2}.$$

ここで、接続公式

$$\pi K' = -K\log x + 2\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+n)}{n!}\right\}x^n\left(\log 2 - \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\cdots - \frac{1}{2n}\right)\right)$$

を用いると

$$\frac{K'}{K} \sim -\frac{1}{\pi}\log x + (\text{holomorphic}) \qquad (x \sim 0)$$

となるので、$a=-\pi^{-1}$ となる。ここで、

$$\tau = i\frac{K'}{K}$$

とおくと

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{\pi i x(1-x)K^2}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau} &= \pi i x(1-x)K^2\frac{d}{dx} \\ &= \pi i K^2\delta.\end{aligned} \tag{9}$$

さて、ここで、

$$X := K, \qquad Y := \sqrt{x}K, \qquad Z := \sqrt{1-x}K$$

とおく。超幾何微分方程式 (8) を (9) を使って τ に関する微分に書き直そう：

$$\frac{1}{\pi i K^2}\frac{d}{d\tau}\left(\frac{1}{\pi i K^2}\frac{d}{d\tau}K\right) = \frac{x(1-x)}{4}K.$$

$$\frac{K''}{K} - 2\left(\frac{K'}{K}\right)^2 = -\frac{\pi^2}{4}K^4$$

ここで ' は τ に関する微分である。したがって、

$$(\log X)'' = (\log X)'^2 - \frac{\pi^2}{4}Y^2 Z^2. \tag{10}$$

また、

$$(\log Y)' = \frac{K'}{K} + \frac{1}{2}\frac{x'}{x} = (\log X)' + \frac{\pi i}{2}Z^2,$$
$$(\log Z)' = \frac{K'}{K} - \frac{1}{2}\frac{x'}{1-x} = (\log X)' - \frac{\pi i}{2}Y^2$$

より、

$$(\log Y)' - (\log X)' = \frac{\pi i}{2}Z^2, \tag{11}$$
$$(\log Z)' - (\log X)' = -\frac{\pi i}{2}Y^2. \tag{12}$$

そこで、

$$A = (\log X)', \qquad B = (\log Y)', \qquad C = (\log Z)'$$

とおくと、(10) より

$$A' = A^2 - (B-C)(C-A) = -BC + CA + AB.$$

また、(11)、(12) より

$$\begin{aligned} B' = A' + \frac{\pi i}{2}ZZ' &= A' + \pi i Z^2 C \\ &= -BC + CA + AB + 2(B-A)C \\ &= BC - CA + AB \\ C' = A' - \frac{\pi i}{2}YY' &= A' - \pi i Y^2 B \\ &= -BC + CA + AB + 2(C-A)B \\ &= BC + CA - AB. \end{aligned}$$

以上によって、A、B、C が Halphen の方程式 (7) の解になることがわかった。

注意： 楕円積分はテータ零値でかける：

$$K=\frac{1}{2}\pi\theta_3^2,\qquad \sqrt{x}K=\frac{1}{2}\pi\theta_2^2,\qquad \sqrt{1-x}K=\frac{1}{2}\pi\theta_4^2.$$

また、x を τ の函数で表示すると

$$x=\frac{\theta_2^4}{\theta_3^4}=\frac{e_2-e_3}{e_1-e_3}.$$

3~~4~~. Halphen の方程式

1, 2
~~2, 3~~節で述べたことから、テータ零値の対数微分 (6) は Halphen の方程式 (1) の一つの解である。また、Halphen の方程式は、次の性質を持つ：

命題 1　$X_j(\tau)$ (j=2,3,4) が Halphen の方程式を満たせば、ad−bc=1 となる任意の複素数 a, b, c, d に対して、

$$\widetilde{X_j}(\tau)=\frac{1}{(c\tau+d)^2}X_j\left(\frac{a\tau+b}{c\tau+d}\right)-\frac{c}{c\tau+d}$$

もまた、Halphen の方程式の解となる。

命題 1 から、Halphen の方程式の generic な解空間が得られたことになる。実際、X_j が互いに異なる時、Halphen の方程式の解は、テータ零値を使って命題 2 の形で表される：

定理 2　t を任意の複素数、k_1, k_2, k_3 を相異なる複素数とする。X_j を初期条件 $X_j(t)=k_j$ (j = 2, 3, 4) を満たす Halphen の方程式の解とすると、ad−bc=1 となる複素数 a, b, c, d が

存在して、

$$X_j(\tau) = 2\frac{\partial}{\partial \tau} \log \left(\vartheta_j(0, \frac{a\tau + b}{c\tau + d})(c\tau + d)^{-1/2} \right)$$

となる。

Halphen の方程式の解空間は、generic な部分は、定理 2 とテータ函数の変換公式より、$\Gamma_2 \backslash SL(2,\mathbf{C})$ となる。$X_2=X_3$ となる場合は、有理式で解ける。即ち

$$X_2(\tau) = X_3(\tau) = -\frac{c}{c\tau + d},$$
$$X_4(\tau) = -\frac{c}{c\tau + d} + \frac{a}{(c\tau + d)^2}.$$

従って、$P^1(C)$ の上の次数 2 の line bundle でパラメトライズされる。

文献

詳しくは

Y. Ohyama, *Differential Relations of Theta Functions*, 大阪大学プレプリント

を見てください。Jacobi, Halphen, Chazy の古典的文献は

C.G.J.Jacobi, *Über die Differentialgleichung, welcher die Reihen* $1 \pm 2q + 2q^4 \pm 2q^9 +$ *etc,.* $2\sqrt[4]{q} + 2\sqrt[4]{q^9} + 2\sqrt[4]{q^{25}} +$ *etc. Genüge Leisten.*, Crelles J., 36, 97--112, 1848.

G.Halphen, *Sur une système d'équations différentielles*, C.R.Acad.Sci., Pais, 92, 1101--1103, 1881.

J.Chazy, *Sur les équations différentielles du trousième order et d'ordre supérieur dont l'intégrale générale a ses points critiques fixes*, Acta Math., 34, 317--385, 1911.